Beweiser – „Integer Linear Problems“

Oleg Iskov

Methoden der Verifikation
Universität Bremen SS2005

Grundidee

Optimierung

Beispiel zu Einführung

- Politiker
  - Weniger Ausgeben
  - Viel Stimmen bekommen

Beispiel zu Einführung

Thema	Variable	Stadt	Vorstadt	Land
Straßenbau	X_1	**-2**	**5**	**3**
Waffenkontrolle	X_2	**8**	**2**	**-5**
Subventionen	X_3	**0**	**0**	**10**
Mineralölsteuer	X_4	**10**	**0**	**-2**

Gewinne oder Verluste in Tausend pro $1000

Beispiel zu Einführung

Minimiere $x1+x2+x3+x4$

unter der Bedienungen:

$$-2\,x1 + 8\,x2 + 0\,x3 + 10\,x4 >= 50$$

$$5\,x1 + 2\,x2 + 0\,x3 + 0\,x4 >= 100$$

$$3\,x1 – 5\,x2 + 10\,x3 – 2\,x4 >= 25$$

$$x1, x2, x3, x4 >= 0$$

Formale, Abstrakte Formulierung

Formale, Abstrakte Formulierung

Lineare Funktion:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i$$

Formale, Abstrakte Formulierung

$$\text{maximiere } f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

unter Einhaltung der linearen Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n$$

Formale, Abstrakte Formulierung

- Matrixschreibweise:

  Maximire $f(x) = c\,x$

  Unter Nebenbedienungen $Ax <= b$

  $X >= 0$

- (A, b, c)

Normalformen

Normalformen

- Standartform
- Slackform

Normalformen

- Mögliche Abweichungen von der Standartform:
  - Minimierungsproblem statt Maximierungsproblem
  - Variablen ohne Nichtnegativitätsbedienung
  - Gleichheitsbedienungen statt Ungleichheitsbedienungen
  - Größer als Bedienungen statt Kleiner als Bedienungen

Normalformen

- Einige einfache Operationen zum Umformen:
  - Negierung der Koeffizienten c in der Zielfunktion,
  - Ersetzung von x_j durch $x'_j - x''_j$ mit $x'_j , x''_j >= 0$
  - Ersetzung von $f(x) = b$ durch $f(x) <= b$, $f(x) >= b$
  - Negierung der Koeffizienten a_{ij} , b_i in der betreffenden Bedienung i

Normalformen

Minimiere $-2 x_1 + 3 x_2$

Unter Einhaltung der Nebenbedienungen:

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 - 2 x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0$$

Normalformen

Maximiere $2x_1 - 3x_2 + 3x_3$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &\le 7 \\
-x_1 - x_2 + x_3 &\le -7 \\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\le 4
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Normalformen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq s_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Integer Linear Programming

Ein Spezialfall der linearen Programmierung

Geometrische Interpretation

Geometrische Interpretation

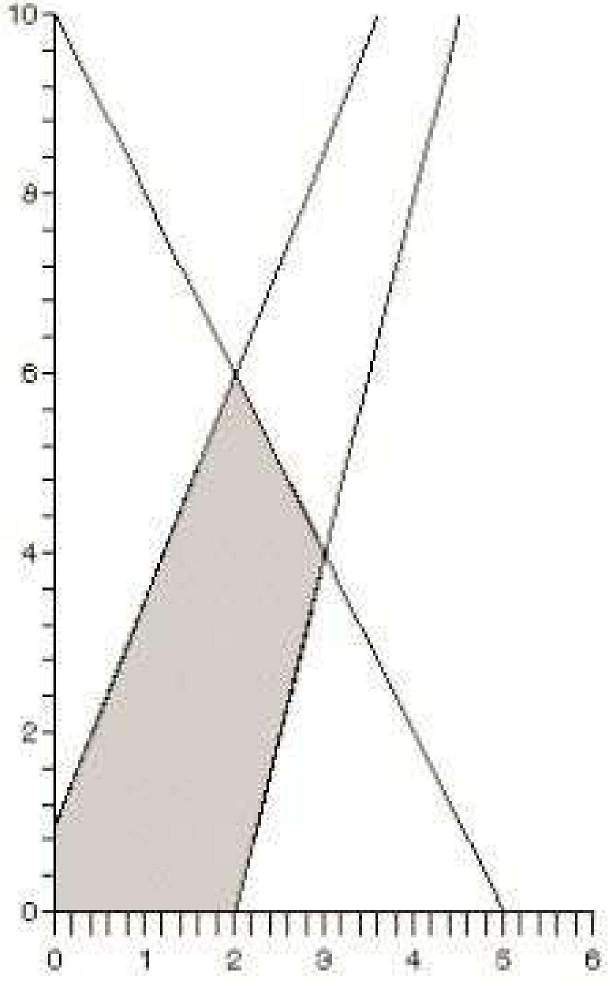
Beispiel:

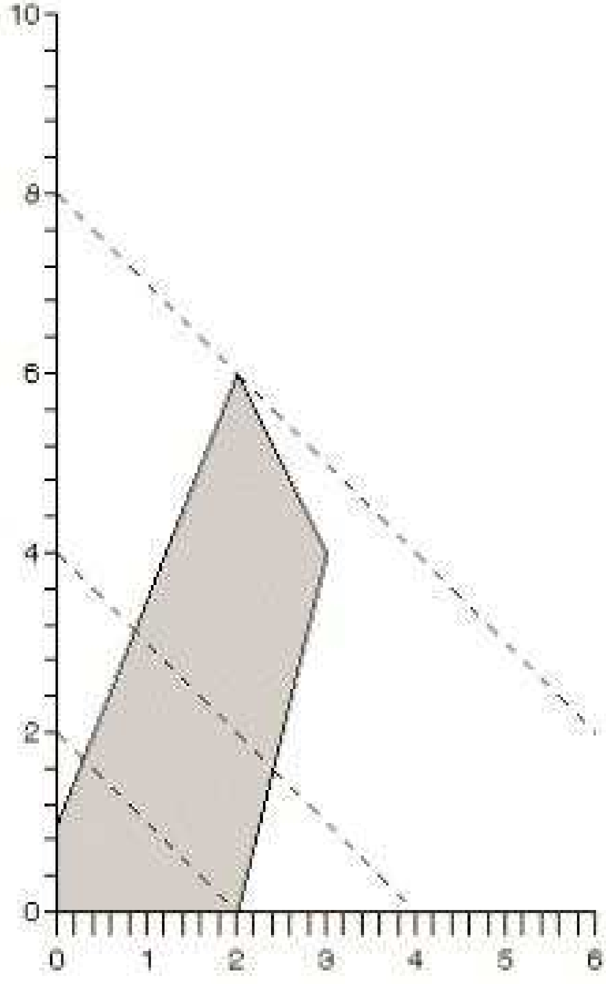
Maximiere x1 + x2

Nebenbedienungen:

- 4x1 - x2 <= 8
- 2x1 + x2 <= 10
- 5x1 - 2x2 <= -2
- x1, x2 >= 0

Geometrische Interpretation





Lösbarkeit

LP muss nicht lösbar sein

Lösungsverfahren

Lösungsverfahren

- **Simplexalgorithmus**
- **Ellipsoid-Methode**
- **Inner-Punkt-Verfahren**

- **Cutthing-Plane-Methoden**

Lösungsverfahren

- Simplexalgorithmus,
  1947 von George Dantzig entwickelt

Lösungsverfahren

- Simplexalgorithmus – Beispiel
  - Eine Firma stellt 2 verschiedene Produkte her. Es stehen 3 Maschinen A, B, C zur Verfügung. Maschine A hat eine maximale monatliche Laufzeit (Kapazität) von 170 Stunden, Maschine B von 150 Stunden und Maschine C von 180 Stunden. Eine Mengeneinheit (ME) von Produkt 1 liefert einen Deckungsbeitrag von 300 Euro, eine ME von Produkt 2 dagegen 500 Euro. Die Fixkosten betragen 36.000 Euro pro Monat. Fertigt man 1 ME von Produkt 1, dann benötigt man dafür zunächst 1 Stunde die Maschine A und danach 1 Stunde die Maschine B. 1 ME von Produkt 2 belegt nacheinander 2 Stunden Maschine A, 1 Stunde Maschine B und 3 Stunden Maschine C.

Lösungsverfahren

- Simplexalgorithmus – Beispiel
- Formulierung mit Ungleichungen
  - $G = 300x1 + 500x2 - 36.000$
  - $1 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \leq 170$ Maschine A
  - $1 \cdot x1 + 1 \cdot x2 \leq 150$ Maschine B
  - $0 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \leq 180$ Maschine C
  - $x1 \geq 0, \quad x2 \geq 0$

Lösungsverfahren

- Simplexalgorithmus – Beispiel
- Maximiere die Zielfunktion G unter den Nebenbedingungen:

$$G - 300x1 - 500x2 = - 36.000$$

$$yA + x1 + 2x2 = 170$$

$$yB + x1 + x2 = 150$$

$$yC + 3x2 = 180$$

$$yA, yB, yC, x1, x2 \geq 0$$

Lösungsverfahren

- Simplexalgorithmus – Beispiel
- Diese Gleichungen überträgt man in ein so genanntes *Simplex-Tableau*:

	x1	x2	rechte Seite
G	-300	-500	-36000
YA	1	2	170 = b1
YB	1	1	150 = b2
YC	0	3	180 = b3

Lösungsverfahren

- Simplexalgorithmus – Beispiel
- Auswahl des Pivotelementes

  - $G := G - a_{0s}\, b_j / a_{rs}$

  - b_j / a_{rs} mit $a_{rs} <> 0$

Lösungsverfahren

- Simplexalgorithmus – Beispiel
- Auswahl des Pivotelementes

  - Spalte1:
  - Reihe 1: 170 / 1 = 170 Reihe 2: 150 / 1 = 150 Reihe 3: a31 = 0, daher kein Quotient berechenbar.

    Der minimaler Quotient 150

    G = -36000 - (-300)×150 / 1 = 9000

  - Spalte 2:
  - Reihe 1: 170 / 2 = 85 Reihe 2: 150 / 1 = 150 Reihe 3: 180 / 3 = 60 Der minimaler Quotient 60 erhält man also in Reihe 3.

    G = -36000 - (-500)×60 / 3 = -26000

Lösungsverfahren

- Simplexalgorithmus – Beispiel
- Neue Tabelle:

	YB	x2	rechte Seite
G	300	-200	9000
YA	-1	1	20 = b1
x1	1	1	150 = b2
YC	0	3	180 = b3

Lösungsverfahren

- Simplexalgorithmus – Beispiel
- Nach noch einem Austauschschritt:

	YB	YA	rechte Seite
G	100	200	13000
x2	-1	1	20 = b1
x1	2	-1	130 = b2
YC	3	-3	120 = b3

GLPK - Solver